MESURES DE PERFORMANCES AJUSTÉES POUR LE RISQUE (MPAR) ET ALLOCATION DES CAPITAUX PROPRES

Jean-Laurent Viviani

MESURES DE PERFORMANCES AJUSTÉES POUR LE RISQUE (MPAR) ET ALLOCATION DES CAPITAUX PROPRES

Jean-Laurent Viviani [1]

Résumé

Le développement de la gestion du risque fondée sur la VaR (Value at Risk) sert de cadre à un ensemble de mesures de performances ajustées pour le risque. L'article présente les mesures de base et leurs propriétés. Le rapprochement de la gestion du risque avec la gestion de portefeuille espérance variance permet de démontrer la validité de l'utilisation de ces mesures pour l'allocation des capitaux propres et leur compatibilité avec le Modèle d'Evaluation des Actifs Financiers (MEDAF). Ce rapprochement nous conduit à proposer deux nouvelles mesures de performance ajustés pour le risque.

Mots clés. MEDAF – Performance – RAROC – risque - Value at Risk

Abstract

Value at Risk (VaR) is now an important tool in risk management. It can be used for developing risk adjusted performance measures. In this paper we expose the basis measures and investigate their properties. Using portfolio management theory we show that risk adjusted performance measures are sensible guide in allocating internal capital and are perfectly compatible with the Capital Asset Pricing Model (CAPM). So we can expose two new risk adjusted performance measure.

Keywords. CAPM - Performance – RAROC – risk – Value at Risk-

[1] LARGO, Université d'Angers.

Les mesures de performance ajustées pour le risque (MPAR) ont trois utilisations principales. Elles ont pour premier objectif la comparaison des performances d'activités qui ont des risques différents. Il faut tenir compte non seulement de la marge bénéficiaire dégagée par un gestionnaire mais aussi du risque qu'il fait subir à son institution. Un gestionnaire qui dégage un bénéfice de 1 million en gérant des bons du Trésor n'utilise pas le capital de la banque de la même manière que celui qui gagne 1 million en spéculant sur des titres très volatiles.

Ces mesures permettent donc de détecter les activités qui ont un avantage compétitif et facilitent les décisions d'allocation du capital de la banque. Au lieu de raisonner sur des mesures d'événements qui ont déjà eu lieu (mesures *ex post*), il faut alors raisonner sur des anticipations de résultat et de risque (mesures *ex ante*).

Elles permettent de calculer les capitaux propres nécessaires pour couvrir l'ensemble des risques (de nature très différente : change, taux marché, prix, crédit …) pris par les gestionnaires. Il s'agit alors de mettre la banque à l'abri du risque de faillite. La liaison entre les MPAR et la rémunération des gestionnaires d'activités bancaires est un moyen de leur faire prendre conscience des contraintes prudentielles qui pèsent sur la banque. Un système de rémunération en parti fondé sur les MPAR peut donc être un moyen de réduire le conflit d'intérêt entre chaque gestionnaire et l'institution dans son ensemble. Pour résumer, la MPAR est censée permettre de maximiser la valeur pour l'actionnaire tout en respectant les contraintes prudentielles réglementaires ou fixées en interne.

Plusieurs règles de transformation peuvent être adoptées pour tenir compte du risque. Il est possible d'ajuster les résultats de l'activité (enlever une prime de risque au résultat) et de diviser par le capital qui lui est alloué (modified return on equity) ou de diviser le résultat non ajusté, par le capital ajusté pour le risque (Risk Adjusted Return On Capital (RAROC) ([1]), ou plus justement, RORAC Return On Risk Adjusted Capital) ou enfin de faire les deux (RARORAC : Risk Adujsted Return On Risk Adjusted Capital). Nous n'étudierons essentiellement le deuxième type de mesures, les plus fréquemment utilisées sachant qu'il est équivalent de corriger le numérateur ou le dénominateur. L'ajustement du capital pour le risque s'effectue alors à l'aide du concept de Value at Risk (VaR).

L'objectif de cet article est d'analyser la signification des MPAR. A l'aide des outils de la gestion de portefeuille espérance variance. A la différence de MATHIS [1997] nous nous placerons donc du point de vue d'un investisseur ou actionnaire bien diversifié. Nous montrons que ces mesures conduisent à une allocation efficiente des capitaux propres de la banque. Le rendement d'équilibre des capitaux ajustés pour le risque est donné par une équation exactement identique à celle du Modèle d'Equilibre Des Actifs Financiers (MEDAF). La reconnaissance de cette identité nous conduit à proposer deux nouvelles mesures de performance ajustées pour le risque qui nous paraissent plus adaptées à la gestion bancaire que les mesures traditionnelles.

Dans une première partie nous présenterons le concepts essentiel de la gestion du risque qui sert de fondement aux MPAR et nous analysons les mesures traditionnelles. Dans la seconde partie nous démontrons que ces mesures conduisent à une allocation efficiente des capitaux propres de la banque en présence ou non d'actifs sans risque. Dans la troisième partie nous explorons la relation entre les MPAR et le MEDAF.

[1] C'est le nom donné par Bankers Trust à son système de gestion du risque (SOUVIRON [1995])

1. Présentation des MPAR

Nous présenterons tout d'abord la mesure de performance d'une activité au sein de la banque puis la relation entre l'activité étudiée et l'ensemble des activités de la banque. Cette analyse nous conduira à proposer une mesure de performance plus adaptée à la gestion bancaire.

1.1. MPAR d'une activité

Le calcul standard d'une MPAR d'un ensemble de positions, ou d'un portefeuille, consiste à diviser le résultat (R) obtenu par le capital ajusté pour le risque (CAR) :

$$MPAR = \frac{R}{CAR} \qquad [1]$$

Le capital ajusté pour le risque est défini comme la perte maximum possible pour un niveau de confiance et un horizon donnés, ce n'est rien d'autre que la VaR.

Plus techniquement la Value at Risk (le CAR) de la position pour la durée t et le niveau de probabilité q, se définit comme le résultat, noté VaR_q tel que le résultat effectif de la position durant l'intervalle [0, t] ne dépasse VaR qu'avec la probabilité de (1-q)

Soit, pour une position de valeur de marché V_t :

$$P\left[\Delta\tilde{V}_t > VaR_q\right] = 1 - q \quad ou \quad P\left[\Delta\tilde{V}_t \leq VaR_q\right] = q$$

Si les variations de valeur de la position suivent une loi normale :

$$P\left[\frac{\Delta\tilde{V}_t - \pi}{\sigma\left(\Delta\tilde{V}_t\right)} \leq \frac{VaR_q - E\left(\Delta\tilde{V}_t\right)}{\sigma\left(\Delta\tilde{V}_t\right)}\right] = q$$

Le quantile de la loi normale centrée réduite est noté z_q, soit ici : $\frac{VaR_q\left(\Delta\tilde{V}_t\right) - E\left(\Delta\tilde{V}_t\right)}{\sigma\left(\Delta\tilde{V}_t\right)} = z_q$

La Value at Risk peut donc s'écrire : $VaR_q\left(\Delta\tilde{V}_t\right) = E\left(\Delta\tilde{V}_t\right) + z_q \times \sigma\left(\Delta\tilde{V}_t\right)$ [2]

Si le gestionnaire des risques ne s'intéresse qu'au risque de perte par rapport aux anticipations de variations, ou si ces anticipations sont négligées, la value at risk se simplifie en :

$$VaR_q\left(\Delta\tilde{V}_t\right) = z_q \times \sigma\left(\Delta\tilde{V}_t\right) \qquad [3]$$

La MPAR d'une position est donc à partir de [1] et [3] : $MPAR\left(\Delta\tilde{V}_t\right) = \frac{E\left(\Delta\tilde{V}_t\right)}{z_q \sigma\left(\Delta\tilde{V}_t\right)}$ [4]

La MPAR s'analyse donc comme le ratio du résultat obtenu sur une position sur les capitaux qu'il faut mettre en réserve pour couvrir la plus grande majorité des pertes possibles. Ainsi si q vaut 95 %, le capital mis en réserve (le CAR) permet de couvrir 95 % des évolutions possibles de la position.

1. 2. MPAR d'une activité et CAR de la banque

Le capital ajusté pour le risque de la banque n'est pas égal à la somme des CAR de ses différentes activités. Du fait que la corrélation imparfaite entre les différentes activités (la corrélation entre les risques est faible pour les banques généralistes TOLLA [1996]), le CAR de la banque est inférieur à la somme des CAR. Plus précisément, la relation est :

$$CAR_{Bque} = \left[\sum_i \sum_j CAR_i CAR_j c_{ij} \right]^{1/2} \qquad [5]$$

c_{ij} : coefficient de corrélation entre l'activité i et l'activité j.

La relation [5] peut être écrite de manière à faire apparaître la contribution au CAR de la banque de chacune des activités :

$$CAR_{Bque} = \left[\sum_i CAR_i \sum_j CAR_j c_{ij} \right]^{1/2} \qquad [6]$$

La deuxième somme représente l'équivalent de la covariance de l'activité i avec l'ensemble des activités de la banque, elle s'interprète donc comme la contribution aux CAR de la banque de l'activité i. Pour mesurer la performance d'une activité au sein d'une banque (et non une activité isolée), il semble utile de ne pas seulement utiliser le CAR, mais la contribution au CAR de la banque. Nous appellerons donc mesure diversifiée la mesure :

$$MPARD_i \equiv \frac{R_i}{CARD_i} = \frac{R_i}{CAR_i c_{iBque}} = \frac{R_i}{x_i CAR_{Bque} \beta_{iBque}} = \frac{R_i / x_i CAR_{Bque}}{\beta_{iBque}} \qquad [7]$$

c_{iBque} : coefficient de corrélation de l'activité i avec l'ensemble des activités de la banque.

$\beta_{iBque} = \dfrac{Cov\left(\tilde{R}_i, \tilde{R}_{Bque}\right)}{V\left(\tilde{R}_{Bque}\right)}$: coefficient de contribution de l'activité i au risque de la banque,

CAR_{Bque} : capitaux ajustés pour le risque de la banque.

Ce ratio s'analyse comme la rentabilité de l'activité i divisée par son risque systématique ([1]).

[1] Cette mesure est donc très proche du ratio de Treynor. Le béta n'est pas calculé par rapport aux rendements du marché mais par rapport aux rendements de la banque. Nous examinons plus bas les fondements de cette ressemblance.

L'intérêt de cette mesure vient du fait que le capital ajusté pour le risque de la banque est égal à la somme des CARD (annexe 1) :

$$CAR_{Bque} = \sum_i CAR_i c_{iBque} \qquad [8]$$

La mesure de performance ajustée pour le risque d'une activité i peut se décomposer de la manière suivante :

$$MPAR_i = \frac{R_i}{CAR_i} \frac{\sigma_{Bque} V z_q}{CAR_{Bque}} = \frac{\sigma_{Bque}}{x_i \sigma_i} \frac{R_i}{CAR_{Bque}} = \frac{1}{x_i \beta_{iBque}} \frac{c_{iBque} R_i}{CAR_{Bque}} \qquad [9]$$

avec

σ_{Bque} : écart type de l'ensemble des activités de la banque,
σ_i : écart type de l'activité i,

Le premier ratio de l'équation [9] mesure l'inverse de la contribution au risque de la banque de l'activité i, le second mesure la contribution de l'activité i à la rentabilité financière. La MPAR de l'activité i est d'autant plus forte que sa contribution au risque est faible et que sa contribution à la rentabilité financière est forte. La différence entre MPAR et MPARD provient du traitement de la corrélation avec les activités de la banque, la MPAR revient à corriger le résultat par la corrélation alors que la MPARD corrige le CAR.

La performance du gestionnaire de l'activité i dépend de sa capacité d'accroître le résultat de son activité compte tenu de son risque, le gain de diversification ne dépend pas de lui, il faut donc utiliser principalement la MPAR. Il serait injuste de considérer un gestionnaire comme plus performant qu'un autre du seul fait que l'activité qu'il gère est moins corrélé avec les activités globales de la banque.

La performance de la banque dépend des capacités de chacun de ses gestionnaires et de la corrélation entre ses différentes activités. Pour des gestionnaires également compétents, la performance de la banque sera d'autant plus forte que la corrélation entre ses activités sera faible. La mesure pertinente est donc la MPARD. La banque envisage une nouvelle activité soit à cause de sa forte rentabilité soit parce qu'elle améliore sa diversification (sa corrélation avec l'ensemble des activités de la banque est faible).

2. La MPAR et l'allocation des capitaux

Dans cette section nous nous interrogerons sur l'utilité des MPAR dans le choix par la banque d'une combinaison d'activités. Au lieu de raisonner sur des MPAR *ex post* nous raisonnerons sur des MPAR *ex ante*.

2.1. La MPAR et les frontières d'efficience espérance variance

La recherche de la meilleure structure d'activités pour la banque peut être obtenue en cherchant à minimiser les CAR nécessaires pour obtenir un résultat donné (absence d'actif sans risque) ou par maximisation directe de la MPAR (présence d'actifs sans risque). Dans ce dernier cas, la MPAR doit être légèrement modifiée, le résultat est remplacé par la prime de résultat liée aux activités risquées, soit pour une activité i quelconque ([1]) :

$$MPAR_{ie} = \frac{\left(E\left(\tilde{R}_i\right) - R_F\right)V_i}{CAR_i} \qquad [10]$$

Cette correction est nécessaire car, en son absence, le gestionnaire de l'activité i pourrait obtenir une MPAR tendant vers l'infini en n'investissant que dans des activités sans risque (en ne réalisant que des activités d'arbitrage). En effet ces activités ne consomment pas de capitaux propres puisque leur risque de perte est nul. Cette correction lève une critique importante généralement faite au MPAR initial (WILSON [1992], DOWD [1998]).

Les structures d'activités risquées obtenues par chacune des deux méthodes sont strictement identiques à celles données par la gestion de portefeuille espérance – écart type. Les méthodes d'optimisation fondées sur la MPAR conduisent donc la banque à choisir une structure d'activités efficiente (cf. annexe 2).

Les structures d'activités risquées optimales sont **indépendantes du niveau de probabilité q attribué à la VaR (du niveau de z_q)** (cf. annexe 3). En revanche, **la part des activités de marché,** V, couverte par les CAR dépend du niveau de probabilité q. Pour un niveau de CAR fixé, plus le niveau de q est élevé et moins la valeur des activités risquée est grande (cf. annexe 3). Selon cette approche, toutes les banques ont la même répartition des activités risquées. Ou, plus exactement, les différences dans les structures d'activités ne peuvent s'expliquer que par des différences d'informations ou de compétences entre les banques et non par la gestion du risque. En revanche le choix de q détermine le ratio actif sur capitaux propres. La valeur de q ne peut donc pas être fixée indépendamment de la politique d'endettement de la banque. L'endettement optimal dépend de l'avantage fiscal, des coûts spécifiques de faillite et des coûts d'agence (GOFFIN [1999], MATHIS [1997]). Si la fixation de q est fortement reliée au deuxième facteur explicatif, sa relation avec les deux autres facteurs n'est pas explicite. Une valeur de q arbitraire peut donc conduire à une politique d'endettement qui n'est pas optimale. Dans l'ensemble de l'article nous raisonnerons donc dans un monde sans impôt et sans coût d'agence pour ne pas avoir à traiter des relations complexes entre la VaR et la politique d'endettement de la banque.

Dans le plan, Résultat – CAR, la frontière d'efficience des activités de la banque s'écrit :

$$V \times E\left(\tilde{R}_{Bque}\right) = V \times R_F + CAR \times MPAR \qquad [11]$$

Le résultat global de la banque est égal

- au résultat obtenu si toutes les activités étaient sans risque ,

---

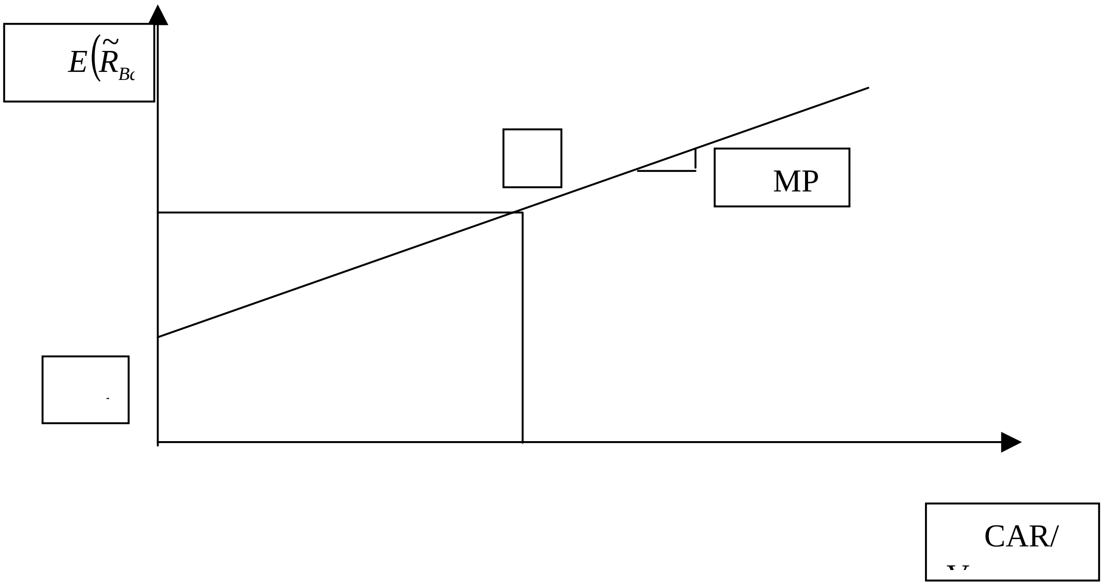
[1] Il existe donc une relation très simple entre la MPAR et le ratio de SHARPE : $MPAR = \frac{RS}{z_q}$. La MPAR a un avantage sur le ratio de Sharpe car elle peut être calculée pour toutes les activités. Il est difficile de calculer le rendement d'un contrat car l'investissement initial est nul, en revanche la MPAR est relativement aisée à calculer.

- plus une prime égal au montant des capitaux propres engagés multipliés par la MPAR.

Ou dans le plan, Espérance des rendements – CAR/V

$$E\left(\tilde{R}_{Bque}\right) = R_F + \frac{CAR}{V} \times MPAR \qquad [12]$$

Cette équation ressemble beaucoup à l'équation de la frontière d'efficience en présence d'actifs sans risque. CAR/V s'interprète comme la mesure de risque et la MPAR comme la prime de risque.



2.2. Propriétés de la MPAR

Connaissant la structure des activités risquées de la banque il convient de se demander quel est le point de comparaison des MPAR calculées pour chacune des activités.

A partir du risque de l'ensemble des activités risquées de la banque, la frontière d'efficience indique le rendement que des dirigeants, sans information particulière, auraient pu obtenir. Connaissant, le quantile de la loi normale centré réduite utilisé par la banque, il est possible de construire l'équivalent de la frontière d'efficience dans le plan espérance – CAR/V (cf. graphique de l'annexe 3). La pente de cette droite est :

$$MPAR_M = \frac{\left(E\left(\tilde{R}_M\right) - R_F\right)}{(CAR/V)_M}$$

Le gestionnaire de l'activité i obtient une bonne performance si : $MPAR_i > MPAR_M$. La comparaison ne se fait pas avec la MPAR de la banque car celle-ci n'est pas nécessairement sur la frontière d'efficience.

On présente souvent la MPAR comme le ratio du **rendement** obtenu par le gestionnaire sur le CAR (nous noterons cette mesure MPARR). Le gestionnaire d'une activité ou d'un ensemble d'activités doit obtenir les rendements les plus forts possibles compte tenu des capitaux propres qui lui sont alloués. Cette mesure n'est pas valable (WILSON [1992]). En effet, en l'absence de contraintes, le gestionnaire peut obtenir une performance aussi grande qu'il le souhaite en combinant des positions risquées qu'il est chargé de gérer et une position sans risque (cf. annexe 3).

3. MPAR ET MEDAF

3.1. Rentabilité exigée pour les CAR

A partir du théorème de séparation de Tobin (annexe 3) et en adaptant la démonstration du MEDAF effectuée par SHARPE [1964], il est possible de montrer que les rentabilités des capitaux propres ajustés pour le risque sont reliées par la formule du MEDAF (annexe 4).

$$E(\tilde{r}_i) = r_F + \beta_i \left[E(\tilde{r}_M) - r_F\right] \qquad \text{avec} \quad E(\tilde{r}_k) = \frac{E(\tilde{R}_k)V}{CAR_i} \quad \text{pour k = i, M, F.}$$

Le rendement exigé pour les capitaux ajustés pour le risque (qui n'est rien d'autre que l'espérance de la MPAR) ne dépend donc pas du niveau de probabilité q choisi contrairement à ce qui est affirmé dans la littérature (DOWD [1998], WILSON [1992]).

La relation du MEDAF est transformée de manière à faire apparaître les capitaux ajustés pour le risque diversifié : $E(\tilde{R}_i)V = R_F V + \frac{E(\tilde{R}_M) - R_F}{z_q \sigma_M} CARD_i$

Cette équation indique quel bénéfice l'investisseur peut espérer en investissant $CARD_i$ dans la position i. Le bénéfice attendu dépend de la prime de risque par unité de risque pris en compte par la banque : $\frac{E(\tilde{R}_M) - R_F}{z_q \sigma_M}$.

3.2. Nouvelles mesures de performance ajustées pour le risque

Les résultats précédents suggèrent de transposer les mesures de JENSEN [1968] et de TREYNOR [1965] dans le cadre de la gestion du risque. Le contrôleur des risques souhaite comparer les performances obtenus par un gestionnaire avec les performances du marché.

La droite des risques ex post est donnée par l'équation : $\overline{R}_P^E = R_F V + \frac{\overline{R}_M - R_F}{z_q \sigma_M} CARD_P$

L'équivalent de la mesure de Jensen que nous proposons est : $\alpha_P \equiv R_P - \overline{R}_P^E$. C'est l'écart entre le résultat obtenu par le gestionnaire sur les positions P qu'il gère et le résultat qu'un investisseur aurait pu obtenir sur le marché en affectant $CARD_P$ capitaux propres. Un alpha positif signifie donc que le gestionnaire a fait une bonne utilisation des capitaux propres qui lui ont été alloués.

L'équivalent de la mesure de Treynor est égal à la pente de la droite qui part du résultat sans risque et qui passe par le point (R_P, $CARD_P$) soit : $RT_P = \frac{R_P - R_F V}{CARD_P}$

Il est donc possible de transposer l’ensemble des mesures de performance traditionnelles de la gestion de portefeuille (Sharpe, Jensen et Treynor) dans le cadre de la gestion du risque fondée sur la VaR.

Conclusion

Les MPAR représentent un progrès considérable par rapport aux mesures traditionnelles de performance qui ne sont pas corrigées pour le risque. Elles conduisent à allouer de manière optimale les capitaux propres de la banque et permettent de détecter les activités qui créent de la valeur pour l’actionnaire. Cependant les MPAR, comme les mesures de performances classiques en gestion de portefeuille dont elles sont théoriquement très similaires, ne sont pas exemptes de faiblesses. Elles supposent que les actionnaires des banques sont bien diversifiés, la levée de cette hypothèse doit entraîner une modification des mesures (le sujet est traité de manière approfondie par MATHIS [1997]).

De plus, en présence d'asymétrie d’information entre les gestionnaires d’activités et le contrôleur des risques, elles peuvent conduire à des conclusions erronées : un gestionnaire sans information particulière peut être jugé plus performant qu’un gestionnaire bien informé par le contrôleur des risques (ADMATI et al. [1986], DYBVIG & ROSS [1985], pour la démonstration dans le cadre de la gestion de portefeuille et VIVIANI [1999], pour la transposition des résultats dans le cadre de la gestion du risque fondée sur la VaR). Ces résultats posent un grave problème lorsqu’il s’agit d’établir des rémunérations fondées sur les MPAR.

Références Bibliographiques

ADMATI A., BHATTACHARYA S.,PFLEIDERER P. & ROSS S. (1986) : "On timing and selectivity", *Journal of Financ*e, 41, p. 715 - 30.

DYBVIG P. & ROSS S. (1985) : "Differential information and performance measurement using a security market line", *Journal of Financ*e 40, p. 483 - 19.

ELTON E.J. & GRUBER M.J. (1991), Modern Portfolio Theory and Investment Analysis, fourth edition, John Wiley and Sons, New York.

DOWD K. (1998), Beyond Value at Risk, Wiley.

GOFFIN R. (1999), Principes de finance moderne, 2ème édition, Économica.

JENSEN M. (1968), « The Performance of mutual funds in the period 1945 – 1964 », *Journal of Business*, 42, n° 2, p. 167 – 247.

MATHIS J. (1997), « Fonds propres économiques « RAROC » et gestion bancaire », présentation à la 14ème conférence internationale de l’AFFI.

SHARPE W. (1964), « Capital Asset Prices : a theory of market equilibrium under condition of risk », *Journal of Finance*, septembre p. 425 - 442.

SOUVIRON P. (1995), « Le système Raroc de Bankers Trust », *Banque,* n° 564, novembre, p. 25 – 27.

TOLLA G. (1996), « RAROC : outil de contrôle des risques de gestion des crédits », », *Banque,* n° 576, décembre, p. 27 – 30.

TREYNOR J. (1965), « How to rate Management of Investment Funds », *Harvard Business Review*, 43, n°1, p. 63 – 75.

VIVIANI (1999), « MPAR et asymétrie d’information », document de travail du LARGO,

WILSON T. (1992), « RAROC remodelled », Risk, vol 5, septembre, p. 112 – 117.

ANNEXE 1 RELATION ENTRE LE CAR DE LA BANQUE ET LES CAR DE SES ACTIVITÉS

$$CAR_{Bque} = z_q V \sigma\left(\tilde{R}_{Bque}\right)$$

En utilisant la définition de l'écart type des rendements :

$$CAR_{Bque} = z_q V\left[\sum_i x_i Cov\left(\tilde{R}_i, \tilde{R}_{Bque}\right)\right]^{1/2} = z_q V\left[\sum_i x_i c_{iBque}\sigma\left(\tilde{R}_i\right)\sigma\left(\tilde{R}_{Bque}\right)\right]^{1/2}$$

Sachant que $CAR_i = z_q V x_i \sigma\left(\tilde{R}_i\right) \Rightarrow x_i\sigma\left(\tilde{R}_i\right) = \dfrac{CAR_i}{z_q V}$, on peut écrire l'équation précédente : $CAR_{Bque}{}^2 = z_q V\sigma\left(\tilde{R}_{Bque}\right)\left[\sum_i CAR_i c_{iBque}\right]$ soit $CAR_{Bque} = \sum_i CAR_i c_{iBque}$

ANNEXE 2 ALLOCATION OPTIMALE DES ACTIVITÉS DE LA BANQUE

Soient : $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ M \\ x_N \end{bmatrix} \quad E(\tilde{R}_P) = \overline{R} = \begin{bmatrix} E(\tilde{R}_1) \\ M \\ E(\tilde{R}_N) \end{bmatrix} \quad \Omega = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \Lambda & \sigma_{1N} \\ M & (\sigma_{ij}) & M \\ \sigma_{1N} & \Lambda & \sigma_{NN} \end{bmatrix}$

Par définition le CAR de la banque est donné par : $CAR = V z_q \sigma\left(\tilde{R}_{Bque}\right)$

Or l'écart type des rendements de l'ensemble des activités vaut : $\sigma\left(\tilde{R}_{Bque}\right) = \left(X^T \Omega X\right)^{1/2}$

A1) Répartition des activités en l'absence d'actif sans risque

Le programme à résoudre consiste à minimiser les CAR pour un résultat R donné, soit :

$$\begin{cases} \min\ V z_q \left(X^T \Omega X\right)^{1/2} \\ V X^T \overline{R} = R = rV \\ Q^T X = 1 \end{cases}$$

Q : vecteur de 1.

Ce programme est strictement équivalent au programme classique de la gestion de portefeuille. La structure des activités obtenue est donc sur la frontière d'efficience espérance variance. Il est à noter que z_q n'intervient pas dans la solution. La structure des activités risquées de la banque est donc indépendante du niveau de probabilité attribué à la banque.

A2) Répartition des activités en présence d’actifs sans risque

Le résultat de la banque est égal à : $\left(X^T \overline{R} + \left(1 - X^T Q\right) R_F\right) V = R_F V + X^T \left(\overline{R} - R_F Q\right) V$

La MPAR de la banque s’exprime donc : $MPAR = \dfrac{X^T \left(\overline{R} - R_F Q\right)}{z_q \left(X^T \Omega X\right)^{1/2}}$

Le programme d’optimisation de la banque devient donc :

$$Max\ MPAR = X^T \left(\overline{R} - R_F Q\right) z_q^{-1} \left[X^T \Omega X\right]^{-1/2}$$

La condition de première ordre est :

$$\frac{dMPAR}{dX} = \left(\overline{R} - R_F Q\right) z_q^{-1} \left[X^T \Omega X\right]^{-1/2} + \left(-\frac{1}{2}\right) 2\Omega X \left[X^T \Omega X\right]^{-3/2} \left(X^T \left(\overline{R} - R_F Q\right)\right) z_q^{-1} = 0$$

En multipliant l'équation par $z_q \left[X^T \Omega X\right]^{1/2}$ on obtient :

$$\left(\overline{R} - R_F Q\right) - \Omega X \left[X^T \Omega X\right]^{-1} \left(X^T \left(\overline{R} - R_F Q\right)\right) = 0$$

$$\left(\overline{R} - R_F Q\right) - \left[X^T \Omega X\right]^{-1} \left(X^T \left(\overline{R} - R_F Q\right)\right) \Omega X = 0$$

Posons $\lambda = \left(X^T \left(\overline{R} - R_F Q\right)\right) \left[X^T \Omega X\right]^{-1}$, l'équation devient : $\left(\overline{R} - R_F Q\right) - \lambda \Omega X = 0$

Un dernier changement de variable, technique mais très utile, permet d'obtenir :

$$\begin{array}{l} \lambda X = Z \\ \overline{R} - R_F Q = \Omega Z \end{array} \quad \text{d'où } Z\left(R_F\right) = \Omega^{-1}\left(\overline{R} - R_F Q\right)$$

Le système est résolu en Z. Pour trouver les proportions optimales il faut faire le changement de variable : $X^* = \dfrac{Z_i}{\sum_i Z_i} = \dfrac{1}{Q^T \Omega^{-1}\left(\overline{R} - R_F Q\right)} Z\left(R_F\right)$

La maximisation de la MPAR conduit exactement au même système d’équations que celui de la méthode d’ELTON & GRUBER [1991]. Les proportions obtenues de chacune des activités sont donc exactement identiques à celles du portefeuille efficient sans actif sans risque. Il est à noter que, comme en l’absence d’actif sans risque, le partage optimal des activités risquées est indépendant du choix de z_q.

ANNEXE 3 THÉORÈME DE SÉPARATION DE TOBIN ET MPAR

Le gestionnaire peut combiner des activités risquées de rendement $\tilde{R}_P$ et des activités sans risque. L'espérance de rendement et le risque de cette combinaison est donnée par :

$$E(\tilde{R}_T) = xE(\tilde{R}_P) + (1-x)R_F$$
$$\sigma(\tilde{R}_T) = x\sigma(\tilde{R}_P)$$

Le CAR est donné par l'équation : $CAR = Vz_q x\sigma(\tilde{R}_P) \Rightarrow x = \dfrac{CAR}{Vz_q\sigma(\tilde{R}_P)}$.

En remplaçant x par sa valeur dans l'équation de l'espérance de rendement et en arrangeant les termes on obtient :

$$E(\tilde{R}_T) = CAR\left(\frac{E(\tilde{R}_P) - R_F}{Vz_q\sigma(\tilde{R}_P)}\right) + R_F \text{ ou } MPARR = \frac{E(\tilde{R}_P) - R_F}{CAR} = \left(\frac{E(\tilde{R}_P) - R_F}{Vz_q\sigma(\tilde{R}_P)}\right)$$

$$MPAR = \frac{(E(\tilde{R}_P) - R_F)V}{CAR} = \left(\frac{E(\tilde{R}_P) - R_F}{z_q\sigma(\tilde{R}_P)}\right)$$

Si l'autorité régulatrice fixe le CAR, il est clair que le gestionnaire peut obtenir n'importe quel rendement moyen en diminuant le volume global de ces activités (V) et en accroissant la part de ses activité risquées (x). En revanche la MPAR présentée dans le corps du texte est indépendante de la dimension des activités et dépend bien du rendement et du risque des activités risquées choisies. La diminution du volume d'activité ne fait que réduire la performance. Les plans pertinents de l'analyse de la MPAR sont donc les plans espérance de rendement, CAR/V ou espérance de résultat, CAR.

Le graphique ci-dessous illustre les relations entre la frontière d'efficience espérance, écart type des rendements (gestion de portefeuille) et la frontière d'efficience espérance, CAR/V (gestion du risque).

ANNEXE 4 MPAR ET MEDAF

La démonstration de la relation d'équilibre est dans la droite ligne de celle de SHARPE [1964] puisque nous avons montré que le théorème de séparation de TOBIN s'applique.

Soit un portefeuille, P, constitué x% d'actif risqué, i, et de (1-x)% du portefeuille de marché M.

Les capitaux propres ajustés pour le risque de ces deux positions sont :

$$CAR_M = z_q V\sigma_M(1-x) \Rightarrow (1-x)V = \frac{CAR_M}{z_q\sigma_M}$$

$$CAR_i = z_q V\sigma_i x \Rightarrow xV = \frac{CAR_i}{z_q\sigma_i}$$

Le résultat obtenu pour ce portefeuille est fonction des résultats obtenus sur les deux positions : $E\left(\tilde{R}_P\right)V = \frac{CAR_i}{z_q\sigma_i}E\left(\tilde{R}_i\right) + \left(V - \frac{CAR_i}{z_q\sigma_i}\right)E\left(\tilde{R}_M\right)$

Les capitaux ajustés pour le risque du portefeuille sont fonction des capitaux ajustés pour le risque des deux positions :

$$CAR_P = \left[CAR_i^{\,2} + \left[\left(z_q V_P \sigma_i\right)^2 - 2CAR_i\sigma_i + CAR_i^{\,2}\right]\frac{\sigma_M^{\,2}}{\sigma_i^{\,2}} + 2CAR_i\left(1 - CAR_i\right)\frac{\sigma_{iM}}{\sigma_i^{\,2}}\right]^{1/2}$$

Les dérivées du résultat et du CAR du portefeuille P par rapport à CAR_i au point $CAR_i = 0$ valent :

$$\left.\frac{d\left(E\left(\tilde{R}_P\right)\right)}{dCAR_i}\right|_{CAR_i=0} = \frac{E\left(\tilde{R}_i\right) - E\left(\tilde{R}_M\right)}{z_q\sigma_i}$$

$$\left.\frac{dCAR_P}{dCAR_i}\right|_{CAR_i=0} = \frac{1}{\sigma_M}\left[\frac{\sigma_{iM} - \sigma_M^{\,2}}{\sigma_i}\right]$$

La pente de la tangente à la courbe qui relie I à M au point M dans le plan résultat - CAR vaut : $\left.\frac{d\left(E\left(\tilde{R}_P\right)\right)}{dCAR_i}\frac{dCAR_i}{dCAR_P}\right|_{CAR_i=0} = \frac{\left[E\left(\tilde{R}_i\right) - E\left(\tilde{R}_M\right)\right]\sigma_M}{z_q\left[\sigma_{iM} - \sigma_M^{\,2}\right]}$

La pente de la droite qui part du résultat sans risque et qui passe par la position du marché est égale à la pente précédente soit : $\frac{\left[E\left(\tilde{R}_i\right) - E\left(\tilde{R}_M\right)\right]\sigma_M}{z_q\left[\sigma_{iM} - \sigma_M\right]} = \frac{\left(E\left(\tilde{R}_M\right) - R_F\right)V_M}{CAR_M}$

Comme, au point M, $CAR_M = z_q V_M \sigma_M$ on obtient la relation d'équilibre :

$$E\left(\tilde{R}_i\right) = R_F + \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^{\,2}}\left[E\left(\tilde{R}_M\right) - R_F\right]$$

La relation peut être exprimée en fonction des résultats :

$$E\left(\tilde{R}_i\right)V = R_F V + \frac{c_{iM}\sigma_i}{\sigma_M}V\left[E\left(\tilde{R}_M\right) - R_F\right]$$

Comme $V = z_q V \sigma_i$, la relation devient : $E\left(\tilde{R}_i\right)V = R_F V + \frac{E\left(\tilde{R}_M\right) - R_F}{z_q\sigma_M}CARD_i$